

Chapitre 4 Suites de fonctions - Séries de fonctions

I. Suites de fonctions

Sauf précision contraire, I est un intervalle réel, non réduit à un point et les fonctions considérées sont définies sur I à valeurs réelles ou complexes.

I.1. Convergence simple et convergence uniforme

On désigne par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 1. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I si, $\forall x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

La convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f se traduit par :
 $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N} \mid (\forall n \geq n_{x,\varepsilon}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$

La notation $n_{x,\varepsilon}$ signifiant que $n_{x,\varepsilon}$ dépend de x et de ε .

On note $f_n \xrightarrow{\text{C.S.}} f$ sur I .

Remarque 1. La limite f est unique.

En utilisant les résultats relatifs aux suites numériques, on montre facilement les résultats énoncés avec le théorème qui suit :

Théorème 1. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions qui convergent simplement sur I vers f et g respectivement.

1. La suite $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $|f|$.

2. $\forall \lambda, \mu$ scalaires, la suite $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $(\lambda f + \mu g)$.

3. Si les fonctions $f_n \leq g_n$ sont à valeurs positives avec $f_n \leq g_n$ à partir d'un certain rang alors $f \leq g$.

- Si les f_n sont à valeurs positives et croissantes, à partir d'un certain rang, alors f est croissant
- Si les f_n sont à valeurs positives et convexes à partir d'un certain rang, alors f est convexe (4)

exemples

1°/ $I = [0, 1]$ $f_n(x) = x^n \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Alors $f_n \xrightarrow{\text{C.S.}} f$ avec f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
 f n'est pas continue sur I .

2°/ $I = [0, \frac{\pi}{2}]$, $f_n(x) = \cos^n x$. La suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction f définie par $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ non continue sur I .

Remarque 2

On peut remarquer d'après ces deux exemples que la limite simple d'une suite de fonctions continues sur I n'est pas nécessairement continue sur I . c'est à dire $\lim_{x \rightarrow x_0} [\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)] \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} [\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)]$

3°/ $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ sur \mathbb{R} .

On a $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{C.S.}} f(x) = 0$ avec $f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Mais $f'_n(x) = \cos nx$ n'admet en général aucune limite.

$f'(x) = 0$.

Remarque 3. Si les f_n sont dérivables et convergent vers une fonction dérivable f , il n'y a aucune raison que les dérivées f'_n convergent et même si c'est le cas, qu'elles convergent vers f' .

Autrement dit $\frac{d}{dx} [\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)] \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{d}{dx} f_n(x) \right]$
on ne peut pas intervertir les symboles de limite sans précaution

$$1^\circ / I = [0, 1] \quad f_n(x) = 2n^2 x \exp(-n^2 x^2)$$

$$\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{C.S.} f \text{ avec } f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1].$$

$$\text{On a } \int_0^1 f_n(x) dx = 1 - \exp(-n^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{et } \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

$$\text{Ainsi: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$$

On ne peut pas faire traverser le signe d'intégration par le symbole de limite sans précaution. Cet exemple est dû à Darboux en 1875.

Tous ces exemples montrent l'insuffisance de la convergence simple des suites de fonctions. D'où la notion de convergence uniforme.

Définition 2 Convergence uniforme

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I .
La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall x \in I : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\text{On note } f_n \xrightarrow{C.U.} f$$

se manière équivalente (f_n) converge uniformément sur I vers f si et seulement si la suite numérique de terme général

$$u_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

est définie à partir d'un certain rang et vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Exemples:

1°/ $f_n(x) = \frac{nx+1}{x+n}$, $x \in [0,1]$ $n \geq 1$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = x = f(x) \quad \forall x \in [0,1]$

Or $f_n(x) - x = \frac{1-x^2}{x+n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in [0,1]$.

Donc $\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit que.

$f_n \xrightarrow{C.U.} f$ sur $I = [0,1]$.

2°/ La suite $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$ converge uniformément sur $[-a, a]$, a quelconque positif mais pas sur \mathbb{R} .

Proposition 1 si $f_n \xrightarrow{C.U.} f$ sur I alors $f_n \xrightarrow{C.S.} f$ sur I .

-a manière équivalente dans la définition 2 (Conv. uniforme) fournit une méthode pour prouver une convergence uniforme sur I (resp. une convergence non uniforme sur I):

a/ Etude de la convergence simple pour trouver f .

b/ Calcul de $U_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$.

c/ Démonstration que la suite (U_n) converge vers 0 (resp. ne converge pas vers 0).

Il sera parfois plus rapide de majorer (resp. minorer) U_n par une suite qui tend vers 0 (resp. qui ne tend pas vers 0) (* vers 0)

Proposition 2. si I est une réunion ^{finie} d'intervalles,

$I = \bigcup_{k=1}^p I_k$ alors

$f_n \xrightarrow{C.U.} f$ sur I $(\Leftrightarrow) f_n \xrightarrow{C.U.} f$ sur $I_k \quad \forall k=1, \dots, p$.

Preuve

\Rightarrow | $f_n \xrightarrow{C.V.} f$ sur I alors $\sup_I |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$\text{Or } \sup_{I_k} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_I |f_n(x) - f(x)|$$

$$\Rightarrow \sup_{I_k} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall k=1 \rightarrow p$$

\Leftarrow | Si $f_n \xrightarrow{C.V.} f$ sur chacun des I_k , avec :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| &\leq \sup_{1 \leq k \leq p} \left(\sup_{I_k} |f_n(x) - f(x)| \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^p \sup_{I_k} |f_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$

Alors $f_n \xrightarrow{C.V.} f$ sur I .

Le résultat qui suit nous donne un critère permettant de prouver la non convergence uniforme.

Théorème 2 Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f sur I , alors pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I , la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démonstration : Résulte des inégalités

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup_I |f_n(x) - f(x)|$$

Valable pour tout n .

Pour montrer la non convergence uniforme, il suffit de prouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I t. q. la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 (En supposant bien sûr que la convergence simple vers f a été prouvée)

Exemple (*) verso $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

On a $f_n \xrightarrow[\text{u}]{\text{C.S.}} f$ sur \mathbb{R} avec $f(x) = x$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n définie sur \mathbb{R} par

$$g_n(x) = f_n(x) - f(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right) - x, \text{ impaire et dérivable}$$

$$g'_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \leq 0.$$

$$g'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x_{n,k} = 2kn\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\rightarrow g_n(x_{n,k}) = -2nkn\pi. \text{ On a donc } \sup_{[-2nkn\pi, 2nkn\pi]} |g_n(x)| = 2n|k|\pi$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ et } \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)| = +\infty$$

La convergence n'est donc pas uniforme (x)

Critère de Cauchy uniforme

Définition: On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I si :

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) (\forall n > n_\varepsilon, \forall m > n_\varepsilon, \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon)$$

$$\text{u} (\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) (\forall n > n_\varepsilon, \forall m > n_\varepsilon, \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon)$$

Théorème 3 La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur I ssi elle vérifie le critère de Cauchy uniforme.

Démon. $\Rightarrow \sup_I |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_I |f_n(x) - f(x)| + \sup_I |f_m(x) - f(x)|$

où $(f_n) \xrightarrow{\text{C.U.}} f$ sur I

\Leftarrow / Supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit uniformément de Cauchy sur I . Alors.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n > n_\varepsilon, \forall m > n_\varepsilon, \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. (*)$$

Pour tout x fixé dans I , la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , elle converge donc vers un scalaire $f(x)$.

En faisant tendre m vers l'infini dans $(*)$, on déduit que

$$\forall x \in I, \forall n > n_\varepsilon, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

C'est à dire que $f_n \xrightarrow{C.U.} f$ sur I .

Propriétés des fonctions stables par convergence (Théorème de continuité) Uniforme.

Théorème 4 Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction f sur l'intervalle I , alors la limite f est continue sur cet intervalle.

Preuve $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_0$

$$\forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\text{conv. uniforme})$$

f_n est continue en $x_0 \in I$, $\exists \eta_n > 0 \text{ t.q.}$

$$\forall x \in]x_0 - \eta_n, x_0 + \eta_n[\cap I, |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

et par suite pour $x \in]x_0 - \eta_n, x_0 + \eta_n[\cap I$, on a :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{< \varepsilon}$$

f est alors continue en x_0 , x_0 quel qu'il soit.

Alors f est continue sur I .

Remarque Ce résultat peut être utilisé pour justifier une non convergence uniforme.

si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction f non continue sur I , alors la convergence ne peut être uniforme.

Exemple 1°/ $f_n(x) = x^n$ $I = [0,1]$ $f_n \xrightarrow{\text{c.s.}} f$
 $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ f n'est pas continue sur I
 alors $f_n \not\xrightarrow{\text{u.}} f$.

Théorème 5 (Théorème d'interversion de limite et d'intégration)

Soient $[a,b]$ un intervalle fermé de \mathbb{R} et (f_n) une suite d'applications continues de $[a,b]$ dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}), qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f (continue d'après 4 qui)

Alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$ a une limite finie et

$$\text{et on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Preuve.

$$f_n \xrightarrow{\text{c.u.}} f \text{ sur } [a,b].$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall x \in [a,b],$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\text{t.e. } \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Remarque: On dit aussi que la convergence uniforme de (f_n) sur $[a,b]$ permet d'intervertir limite et intégration.

Proposition. Les hypothèses sont celles du théorème 5

Soit $x_0 \in [a, b]$, on pose $F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t) dt$ ($\forall n$)
et $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$, $x \in [a, b]$. Alors, on a.

La suite de fonctions (F_n) converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

Preuve. D'après le théorème 5, f est continue sur $[a, b]$, donc F est bien définie.

Soit $\varepsilon > 0$

$f_n \xrightarrow{C.U.} f$ sur $[a, b] \Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_\varepsilon$, on a

donc pour tout x dans $[a, b]$, $\sup_{[a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \int_{x_0}^x |f_n(t) - f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{b-a} |x - x_0| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Ce qui ~~implique~~ implique que $F_n \xrightarrow{C.U.} F$ sur $[a, b]$.

Exemples

1°/ $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$, $I = [a, 1]$ avec $0 < a < 1$.

$f_n \xrightarrow{C.S.} f$ avec $f(x) = 1$.

On a $f_n \xrightarrow{C.U.} f$ sur $[a, 1]$

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, 1], \quad F_n(x) &= \int_a^x \left(1 - \frac{1}{1+nt} \right) dt \\ &= (x-a) - \frac{\ln(1+nx)}{n} + \frac{\ln(1+na)}{n} \\ F(x) &= (x-a) \end{aligned}$$

$$\text{On a bien } \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(1+nx)}{n} + \frac{\ln(1+na)}{n} = 0$$

De plus $\frac{\ln(1+nx)}{n} \leq \frac{\ln(1+n)}{n}$.

La limite est donc uniforme sur $[a, 1]$.

2°/ Pour $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n \cdot 2^n x^2}$
 $f_n \xrightarrow{c.s.} f \quad f(n) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$.

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{2^n t}{1+n \cdot 2^n t^2} dt = \frac{1}{2n} \ln(1+n \cdot 2^n x^2)$$

$$F(x) = 0. \quad \text{Or } \forall x \neq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \frac{1}{2} \ln 2 \neq 0.$$

On déduit que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Remarque:

∴ Le théorème 5 et la proposition qui s'ensuit, ne s'étendent pas aux intégrales généralisées.

Exemple. $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [0, n] \\ \frac{n+1-x}{n} & \text{si } x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

f_n est continue sur $[0, +\infty[$, admet une intégrale généralisée sur $[0, +\infty[$.

f_n converge uniformément vers f ($f(x) = 0$) sur $[0, +\infty[$

mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$

Théorème 6 (Théorème de dérivation) (*)
 I intervalle de \mathbb{R} (nm réduit à un point) et (f_n) une suite de fonctions de I dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}). On suppose:

- i) $\forall n$, f_n est dérivable (resp. \mathcal{C}^1) sur I
- ii) $f'_n \xrightarrow{c.u.} g$ sur tout intervalle fermé borné $[a, b] \subset I$
 g la limite de (f'_n) sur I

iii) $\exists x_0 \in I$ t.q. $(f_n(x_0))$ converge. Alors

1°) f_n conv. unif. sur tout intervalle fermé borné $[a, b] \subset I$
 soit f la limite de (f_n) sur I .

2°) f dérivable (resp. \mathcal{C}^1) sur I et $f' = g$.

Preuve 1° On commence par montrer que (f_n) converge uniformément sur tout intervalle fermé borné $[a, b] \subset I$.

Soit $x \in [a, b]$, $n, m \in \mathbb{N}$. On appliquera le théorème des accroissements finis

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

$$\leq \sup_{t \in [x_0, x]} |f'_n(t) - f'_m(t)| |x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

Soit $[\alpha, \beta]$ un fermé borné de I t.q. $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$ et $x_0 \in [\alpha, \beta]$

$$\text{On } \sup_{[\alpha, \beta]} |f_n(x) - f_m(x)| \leq (\beta - \alpha) \sup_{[\alpha, \beta]} |f'_n(t) - f'_m(t)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

$\Rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[\alpha, \beta]$ et donc sur $[a, b]$

Soit f la limite simple de f_n sur I (*)

°/ a) Cas où les (f_n) sont de classe C^1

Soit $x \in I$, $\exists [a, b]$ fermé borné t.q. $x \in [a, b]$.

et soit $x_1 \in [a, b]$. On pose

$$h_n(x) = \int_{x_1}^x f'_n(t) dt \quad \text{pour } x \in [a, b].$$

D'après la proposition du théorème 5, on a $h_n \xrightarrow{C^0} h$ sur $[a, b]$

avec $h(x) = \int_{x_1}^x g(t) dt$ et g la limite uniforme de f'_n sur $[a, b]$.

$$h_n(x) = \int_{x_1}^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(x_1)$$

$$\downarrow \text{C: } \downarrow \quad \downarrow \text{sup } [a, b] \text{ et } \downarrow \text{C: } \downarrow$$

$$h(x) = \int_{x_1}^x g(t) dt = f(x) - f(x_1)$$

f est la limite uniforme d'une suite (f'_n) continue sur $[a, b]$.

donc g est continue sur $[a, b] \Rightarrow h$ est dérivable sur $[a, b]$ et on a

$$h'(x) = g(x). \quad \text{Or } h(x) = f(x) - f(x_1) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \Rightarrow f'(x) = g(x)$$

b) Cas où les (f_n) sont dérivables sur I

Soit $x \in I$, $\exists [a, b] \ni x \in [a, b]$.
fixe

On définit les fonctions h_n et h de $J = [a, b] \setminus \{x\}$ dans \mathbb{R} par

$$h_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \quad ; \quad h(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

$h_n \xrightarrow{C.S.} h$ sur J .

D'autre part: ~~pour~~ $\exists n \in \mathbb{N} \ni \forall q$, pour $p, q > \frac{1}{\epsilon}$ et $t \in J$, on a

$$|(f_p(t) - f_q(t)) - (f_p(x) - f_q(x))| \leq |t - x| \underbrace{\sup_{z \in [t, x]} |f'_p(z) - f'_q(z)|}_{< \epsilon}$$

$\text{car } (f'_n) \text{ C.U sur } [a, b]$

$$\Rightarrow |h_p(t) - h_q(t)| < \epsilon.$$

La suite (h_n) converge uniformément sur J .

On a alors

$$\lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t \neq x \\ t \in [a, b]}} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{uniforme } h_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t \neq x \\ t \in [a, b]}} h_n(t) \right)$$

Puisque $\lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t \neq x \\ t \in [a, b]}} h_n(t)$ existe: c'est $f'_n(x)$

On obtient donc $\lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t \neq x}} h(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$, f est dérivable en x

$$\text{et on a } f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = g(x)$$

(*)

II. Séries de fonctions

1° Définitions

Définition 1.

1° Soit $D \subseteq \mathbb{R}$. Une série de fonctions de D dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) est la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'une application $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}). Étudier la série de fonctions, c'est étudier la suite de fonctions $(S_n)_n$ obtenue avec les sommes partielles.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

2° Avec ces notations, on dit que la ~~série~~ suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement (resp. uniformément) vers la fonction S si la suite $(S_n)_n$ converge simplement (resp. uniformément) vers la fonction S . On notera $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

3° On dit que la série de fonctions $(f_n)_n$ converge absolument si la série de fonctions $(|f_n|)_n$ converge.

Pour les séries de fonctions, on dispose d'une autre notion de convergence qui est souvent utilisée.

Définition 2 Une série de fonctions $\sum f_n$ définie sur D est dite normalement convergente sur $A \subset D$ lorsqu'il existe une série $\sum a_n$, à termes réels positifs, telle que

i/ $\forall x \in A, |f_n(x)| \leq a_n$.

ii/ La série $\sum a_n$ converge

Remarque: Cette définition équivaut à dire que les fonctions f_n sont bornées sur A et que la série numérique $\sum_n \sup_{x \in A} |f_n(x)|$ est convergente.

Exemples

1°/ $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur \mathbb{R} car

$$\left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2°/ $\sum \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ car

$$0 \leq \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2} \quad \forall x \geq 0.$$

Théorème 1 Toute série $\sum f_n$ normalement convergente sur A est uniformément et absolument convergente sur A .

Preuve On utilisera le critère de Cauchy: $\forall q > p \in \mathbb{N}$
 $\forall x \in A$

$$|S_q(x) - S_p(x)| = |f_{p+1}(x) + \dots + f_q(x)| \leq |f_{p+1}(x)| + \dots + |f_q(x)|$$

$\sum a_n$ série à termes positifs convergente. $\forall a_{p+1} + \dots + a_q \quad \forall x \in A.$

D'après le critère de Cauchy, on a. $\sum f_n$ est absolument et uniformément convergente.

1) Remarque Une série peut être uniformément convergente sur A sans y être normalement convergente.

Contre-exemple.

$x \in [0, 1]$. Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$

n'est pas normalement convergente sur $[0, 1]$ car $\sup_{[0, 1]} \left| \frac{(-1)^n x^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$ terme général d'une série divergente.

On a pour tout $x \in [0, 1]$.

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| \stackrel{(*)}{\leq} |f_{n+1}(x)| = \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall x \in [0, 1]$$

Ce qui signifie que $R_n(x)$ converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$

Les théorèmes vus au paragraphe sur les suites de fonctions peuvent être appliqués aux suites des sommes partielles de suites de fonctions et conduisent aux résultats suivants $(*)$

Théorème 2 (Th. de continuité)

Soient I intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point et $\sum_n f_n$ une série de fonction de I dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}).

Soit $a \in I$. On suppose :

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a (resp. sur I)

ii) $\sum f_n$ converge uniformément sur I

alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue en a (resp. sur I).

Théorème 3 (Théorème d'interversion de \sum et \int_a^b)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) telle que la série $\sum_n f_n$ soit uniformément convergente sur $[a, b]$. Alors

la série $\sum_n \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$ est convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\sum_n f_n(x) \right) dx$$

Théorème 4 (Théorème de dérivation)

Soient I un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point et (f_n) une suite de fonctions de I dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}).

On suppose que :

- a/ $\forall n, f_n$ est dérivable (resp. C^1) sur I
- b/ La série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout intervalle fermé, borné $[a, b] \subset I$
- c/ Il existe $x_0 \in I$ tel que $\sum_n f_n(x_0)$ converge

Alors

1°/ La série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout intervalle fermé, borné $[a, b] \subset I$

2°/ La somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est dérivable (resp. C^1) sur I et on a

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$$

(*)

Exemples de mise en œuvre des théorèmes précédents

1°/ Si $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$. On a déjà vu que

la série $\sum f_n$ converge normalement sur \mathbb{R}^+ .

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2} \quad \forall x \geq 0. \quad \frac{1}{1+n^2} \text{ forme général à terme d'une série positif convergente.}$$

et comme les f_n sont continues sur \mathbb{R}^+ , on déduit que la fonction

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

est continue sur \mathbb{R}^+

On a $f'_n(x) = -\frac{ne^{-nx}}{1+n^2}$ et la série $\sum_{n \geq 0} f'_n$ (qui diverge en $x=0$) converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ si $a > 0$ car

$$|f'_n(x)| \leq \frac{ne^{-na}}{1+n^2} \quad \forall x \geq a.$$

$\sum_{n \geq 0} \frac{ne^{-na}}{1+n^2}$ est convergente (critère de Riemann).

Le théorème de dérivation implique que $S(x)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ avec C .

$$S'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ne^{-nx}}{1+n^2}$$

2°) On considère $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} x^n$. On a montré que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

f_n continue sur $[0, 1] \rightarrow$

$$S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n \text{ est continue sur } [0, 1].$$

Les f_n sont de classe C^1 , $f'_n(x) = (-1)^n x^{n-1}$.

et la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ (qui diverge pour $x=1$)

converge normalement sur tout intervalle

$[0, a]$ avec $a \in]0, 1[$ car

$$|(-1)^n x^{n-1}| \leq a^{n-1} \quad \forall x \in [0, a]$$

Th. de dérivation implique que $S(x)$ est de classe C^1 sur $[0,1[$ avec

$$(*) \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n-1} = -\frac{1}{1+x} \quad \forall x \in [0,1[$$

$$S'(x) + \frac{1}{1+x} = 0 \Rightarrow S(x) + \ln(1+x) = c = C \quad \forall x \in [0,1[$$

$$x=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow S(x) = -\ln(1+x) \quad \forall x \in [0,1[.$$

Or S est continue sur $[0,1]$, alors

$$S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\ln(1+x) = -\ln 2$$

Remarque À partir de (*), on a la convergence normale de la série sur $[0,a]$ avec $0 < a < 1$.

Le théorème sur l'intégration implique que

$$\forall a \in]0,1[\quad \int_0^a \frac{dx}{1+x} = \int_0^a \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^a (-1)^n x^{n-1} dx$$

$$\ln(1+a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} a^n.$$

$$\text{Théorème de continuité sur } [0,1] \Rightarrow S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = -\ln 2$$

Théorème (d'Abel Uniforme)

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. Soient (f_n) et (g_n) des séries de fonctions de I dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}). On suppose

1° $\exists A \in \mathbb{R} \quad \forall p, q \text{ dans } \mathbb{N} \quad p < q, \forall x \in I, \text{ on a}$

$$|g_{p+1}(x) + \dots + g_q(x)| \leq A$$

2° La suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur I .

3° La série $(f_n - f_{n+1})$ est uniformément convergente sur I .

Alors la série de fonctions (f_n, g_n) est uniformément convergente sur I .

Preuve Même idée que dans les séries d'Abel.
On fixe un x et passe au sup.

Corollaire 1. Dans le théorème d'Abel uniforme, on peut remplacer la 3^{ème} hypothèse par :

3°) $\forall x \in I$, la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante.

Corollaire 2 Soit $n \in \mathbb{N}$, $f_n = (-1)^n f_n$ où (f_n) est une suite de fonctions de I dans \mathbb{R} . On suppose

1°) $\forall x \in I$ $(f_n(x))_n$ est décroissante.

2°) La suite $(f_n)_n$ v. strict sur I .

Alors la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur I

Exemples

1°) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique décroissante et convergente vers 0, alors les séries de fonctions $(u_n e^{inx})$ $(u_n \cos nx)$ $(u_n \sin nx)$

sont uniformément convergentes sur tout intervalle fermé I ne contenant pas d'éléments de $2\pi\mathbb{Z}$

en effet $\forall p < q$ et $x \in I$, on a

$$\left| \sum_{k=p+1}^q \cos kx \right| \leq \left| \sum_{k=p+1}^q e^{ikx} \right| \quad \text{or} \quad \left| \sum_{k=p+1}^q e^{ikx} \right| = \left| e^{i(p+1)x} \frac{1 - e^{i(q-p)x}}{1 - e^{ix}} \right|$$

$$\left| \sum_{k=p+1}^q \sin kx \right| \leq \left| \sum_{k=p+1}^q e^{ikx} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|} \leq A \quad \forall x \in I, \quad A \in \mathbb{R}$$

On peut donc appliquer le corollaire 1 du théorème d'Abel uniforme.

(Car I fermé ne contenant pas d'éléments de $2\pi\mathbb{Z}$)

2°) Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} x$ $x \in [1, +\infty[$.

et l'app. $I \rightarrow \mathbb{R}$

La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$

Donc admet une borne sup.

converge uniformément sur $[1, +\infty[$

$x \gg 1$, $f_n(x) = \frac{1}{n} x$. la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante

$$\frac{1}{n} x \leq \frac{A}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} x \leq \frac{A}{n} \Rightarrow f_n \xrightarrow{C.U.} 0 \text{ sur } [1, +\infty[.$$

Suites et séries de fonctions.

Préface ou motivation.

Les suites et séries de fonctions ont été inventées pour construire des fonctions qui sont solutions de certains problèmes. Equations différentielles ou fonctionnelles.

Voici deux problèmes assez significatifs.

Exemple 1 Il existe une et une seule fonction f de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} qui vérifie

f est croissante sur $]0, +\infty[$.

$$f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln(x)) = 0$$

Elle est donnée pour $x > 0$ par

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\ln(n) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{x+k} \right]$$

Exemple 2 On se donne $a \in I$ et $q \in C(I, \mathbb{K})$:

L'équation différentielle linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} y''(x) - q(x)y(x) = 0 \\ y(a) = \alpha \\ y'(a) = \beta \end{array} \right. \quad \text{admet une unique solution de classe } C^2 \text{ sur l'intervalle } I.$$

On peut construire, cette solution comme limite, en un sens que l'on précisera, de la suite de fonction (y_n) définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0(x) = \alpha \\ y_{n+1}(x) = \alpha + \beta(x-a) + \int_a^x (x-t)q(t)y_n(t)dt \end{array} \right.$$



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..